

基于 PEM-JFEM 方法的节理岩质边坡稳定性评价

肖 术¹⁾, 吴顺川^{1)✉}, 高永涛¹⁾, 韩 光¹⁾²⁾, 周 喻¹⁾, 程爱平¹⁾

1) 北京科技大学金属矿山高效开采与安全教育部重点实验室,北京 100083 2) 中国有色矿业集团有限公司,北京 100029
✉ 通信作者, E-mail: wushunchuan@ustb.edu.cn

摘 要 以赞比亚一露天铜矿南帮边坡(矿体下盘)为研究对象,将 Rosenbluth 点估计方法与节理有限元方法相结合应用于该节理发育的岩质边坡稳定性评价中。建立以边坡岩体材料强度参数(内摩擦角和黏聚力)为输入变量,安全系数为输出变量的概率模型,点估计状态函数的求解过程引入节理有限元方法。通过现场节理及结构面调查,建立边坡节理有限元模型求解边坡安全系数,得到基于安全系数的边坡变形破坏概率统计指标,对边坡稳定性进行了概率分析,分析结果与现场失稳情况一致。该方法既考虑了岩体材料参数在赋值过程中实际存在的不确定性,同时也考虑了节理岩质边坡的节理属性,充分体现了岩层接触作用的非线性关系,使得对节理岩质边坡的稳定性评价更加合理。

关键词 边坡稳定性分析; 节理岩体; 点估计法; 有限元法; 概率分析

分类号 TD854+.6

Jointed rock slope stability evaluation based on PEM-JFEM method

XIAO Shu¹⁾, WU Shun-chuan^{1)✉}, GAO Yong-tao¹⁾, HAN Guang¹⁾²⁾, ZHOU Yu¹⁾, CHENG Ai-ping¹⁾

1) Key Laboratory of the Ministry of Education for Efficient Mining and Safety of Metal Mine, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

2) China Nonferrous Metal Mining (Group) Co., Ltd., Beijing 100029, China

✉ Corresponding author, E-mail: wushunchuan@ustb.edu.cn

ABSTRACT With the south slope (footwall) of an open pit in Zambia as a research subject, the Rosenbluth point estimation method (PEM) coupled with the jointed finite element method (JFEM) was applied to this jointed rock slope stability evaluation. A probability model was established, which puts the mean and standard deviation of rock material strength parameters (friction angle and cohesive) as input variables and the safety factors as output variables, and the point estimation state functions were solved by the jointed finite element method. According to on-site joints and structural surface surveys, a jointed slope model was built to solve the safety factors, and then the probability distribution of the safety factors was obtained. The results of probability analysis are consistent with the instability situation on site. Since the uncertainty of rock materials and the properties of rock joints are taken into account, this method fully reflects the role of the non-linear relationship among rock layers and makes the rock slope stability estimation more reasonable.

KEY WORDS slope stability analysis; jointed rock mass; point estimate method; finite element method; probabilistic analysis

在边坡工程稳定性评价方面,传统上一直采用安全系数来评价边坡的稳定性,无论是手工计算还是数值方法,安全系数都是由确定的方法得到的定值,它未考虑岩土材料参数存在的变异性 and 不确定性。为了克服上述缺点,不确定性分析被引入到边坡的稳定性评

价中,可靠性指标、破坏概率等被用来评价边坡的安全性^[1]。常用的一种不确定性方法是 Rosenbluth^[2]于1975年提出的统计矩的点估计法,后来得到广泛的应用^[3-9]。

随着计算机科学的发展,数值模拟技术逐渐被引

收稿日期: 2014-05-29

基金项目: 科技北京百名领军人才培养工程资助项目(Z15110000315014); 国家自然科学基金资助项目(51074014, 51174014)

入到传统的不确定性分析中^[10-11]。借助计算机,可以求解复杂边坡的稳定性问题。尤其是对于节理发育的岩质边坡,节理有限元方法^[12-15]的应用,使得对复杂节理岩质边坡的不确定性分析成为可能。节理有限元考虑了岩质边坡中的节理属性,充分体现了岩层接触作用的非线性关系,使得对节理岩质边坡的稳定性评价更加合理。

本文在总结前人研究成果的基础上,将点估计法与节理有限元法相结合应用于节理岩质边坡的稳定性评价中。依据边坡岩层特点,建立了以岩体强度参数为输入变量、边坡安全系数为输出变量的点估计模型。点估计状态函数的求解过程采用节理有限元建立边坡数值模型,应用强度折减法计算输出边坡的安全系数,由点估计法理论,得到边坡安全系数的可靠性指标、破坏概率等统计指标,评价节理岩质边坡的稳定性。

1 点估计法原理

点估计法是基于 Rosenbluth 提出的统计矩概念,采用随机变量的平均值和方差,求得状态函数的一阶矩(均值)、二阶矩等,进而求得边坡的可靠性指标。

对于一般的边坡工程问题,存在状态函数:

$$Z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

式中 x_1, x_2, \dots, x_n 可以为容重、黏聚力、摩擦角等随机变量, Z 可以为边坡安全系数,它们具有一定的分布特征(大多数服从正态分布或对数正态分布)。如图 1 所示,已知 n 个随机变量(x_1, x_2, \dots, x_n)的平均值 μ_{x_i} 和标准差 σ_{x_i} ,在随机变量 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的分布函数未知的情况下,不考虑其变化形态,只在区间(x_{\min}, x_{\max})上分别对称地择其两个取值点,通常取均值 μ_{x_i} 的正负一个标准差 σ_{x_i} ,即

$$\begin{cases} x_{i1} = \mu_{x_i} + \sigma_{x_i} \\ x_{i2} = \mu_{x_i} - \sigma_{x_i} \end{cases} \quad (2)$$

每个随机变量均有两个取值点,对于 n 个随机变量,将会得到 2^n 种计算组合,可求解得到 2^n 个状态函数 Z 的值,即 2^n 个安全系数,进而求得安全系数 Z 的平均值 μ_Z 和标准差 σ_Z 。

这里,假设 n 个随机变量相互独立,且每一组合出现的概率相等,则 Z 的概率值 P_j 为

$$P_j = \frac{1}{2^n} \quad (3)$$

根据中心距与原点矩的估计,可以导出安全系数概率分布的二阶矩表达式,由此可估计出其概率分布的空间形态和位置。

(1) 一阶矩 M_1 随机变量 Z 的 1 阶矩,定义为

$$M_1 = E(Z) = \mu_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz \quad (4)$$

其点估计为

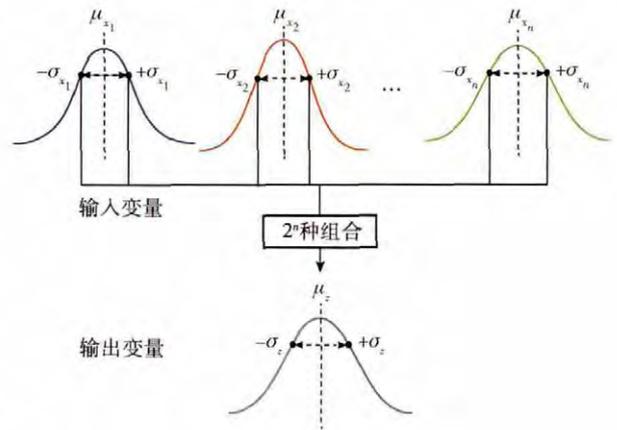


图 1 点估计法原理图

Fig. 1 Schematic illustration of the point estimate method

$$M_1 = E(Z) = \mu_Z = \sum_{j=1}^{2^n} P_j Z_j = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} Z_j \quad (5)$$

(2) 二阶中心矩 M_2 随机变量 Z 的二阶中心矩为 Z 的方差 σ_Z^2 ,其定义为

$$M_2 = E(Z - \mu_Z)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu_Z)^2 f(z) dz \quad (6)$$

其点估计为

$$M_2 = E(Z - \mu_Z)^2 = \sigma_Z^2 = \sum_{j=1}^{2^n} P_j Z_j^2 - \mu_Z^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} Z_j^2 - \mu_Z^2 \quad (7)$$

由 Z 的一阶矩和二阶矩,可以得到反映 Z 分布形态的统计参数如下。

①均值 μ_Z :

$$\mu_Z = M_1 \quad (8)$$

②变异系数 δ :

$$\delta = \sqrt{M_2} / M_1 \quad (9)$$

变异系数 δ 反映了 Z 的离散程度。

③可靠性指标 β :

$$\beta = \frac{\mu_Z - 1}{\sigma_Z} \quad (10)$$

④破坏概率 P_f (假设状态函数 Z 服从正态分布):

$$P_f = 1 - \Phi[\beta] \quad (11)$$

2 节理有限元法模型

2.1 节理单元

Goodman 单元^[16]是一种无厚度的模拟岩石中节点和裂隙等的特殊单元。该单元假定接触是线弹性的,应力与相对位移的关系式为

$$\{\sigma\} = [k_0] \{\omega\} \quad (12)$$

式中 $\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma_n \end{Bmatrix}$, $\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_s \\ \omega_n \end{Bmatrix}$, $[k_0] = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}$, k_s 和 k_n 分别为切向和法相刚度系数。

Goodman 单元能较好较反应单元接触面切向应力

和变形之间的关系 模拟节理发育的岩质边坡 充分体现了岩层接触作用的非线性关系. 该节理单元可以在 Phase 2 等软件平台上实现.

2.2 节理网络

节理网络的生成采用 Veneziano 节理模型 随机节理的生成根据的是泊松点过程法生成无限长节理线, 节理线的方向可以是任意的, 也可以服从某些分布. 节理线被任意分割为不同长度的线段, 线段长度服从特定的分布.

该节理模型由节理方位(orientation)、节理长度(joint length)、节理贯通率(length persistence)、节理密度(joint intensity) 等定义. 其中, 节理方位由节理组平均倾角、平均倾向和费舍尔常数 $K^{[17]}$ 三个量来描述, K 定义为

$$K = \frac{N - 1}{N - R} \tag{13}$$

式中 N 为统计节理极点个数 R 为节理极点矢量合成半径.

节理长度为露头处节理长度分布, 一般为正态分布或负指数分布. 节理贯通率为一条节理线上节理长度与总长度(节理长度加上岩桥长度)的比值, 一般在 0~1 之间. 节理密度的定义有多种, 常见的可采用露头处单位面积上节理条数来表示.

节理参数的获取可以通过测线法调查现场开挖岩体露头表面 统计各类地质几何特征数 然后使用 Dips 软件分析节理分布特征 获取相应工程参数^[18-19].

图 2 是生成的 Veneziano 节理网络模型.



图 2 Veneziano 节理网络

Fig.2 Veneziano joints network

2.3 强度折减法分析

采用强度折减法, 定义边坡安全系数为岩土体的实际抗剪强度与折减后临界破坏时的剪切强度的比值. 反映了边坡刚好达到临界破坏状态时, 对岩和土体的抗剪强度进行折减的程度.

强度折减法的可用公式表示为

$$c_F = c / F_{\text{trial}}, \tag{14}$$

$$\phi_F = \tan^{-1} [(\tan\phi) / F_{\text{trial}}]. \tag{15}$$

式中 c_F 为折减后的内聚力, ϕ_F 为折减后的摩擦角,

F_{trial} 为折减系数. 通过上述公式来调整岩土体的内聚力 c 和内摩擦角 ϕ , 然后对边坡稳定性进行有限元数值分析, 通过不断增加折减系数, 反复计算, 直至达到临界破坏, 此时得到的折减系数 F_{trial} 即为边坡的安全系数.

3 工程背景

该露天铜矿位于赞比亚卢安夏市, 设计采深为 175 m, 境界标高为 1280 m, 目前开采至 1190 m 平台. 边坡台阶坡面角设计值为 65°, 台阶高度设计 15 m (台阶靠帮后两个台阶并段, 并段后为 30 m). 目前在上部开采过程中, 滑坡失稳现象时有发生. 图 3 为该矿边坡处治工程勘探线平面布置图. 图中南帮(矿体下盘)在上部开采过程中小规模滑坡情况较严重, 边坡节理及结构面发育, 基本为顺倾向层状岩体.

本文选取图中 5# 和 6# 勘探线剖面建立 PEM-JFEM 分析模型, 针对 6# 勘探线所在边坡整体稳定性进行了详细评价, 并选取 6# 勘探线和 5# 勘探线上部已经开挖的边坡与实际情况进行对比分析, 验证该方法的可靠性.

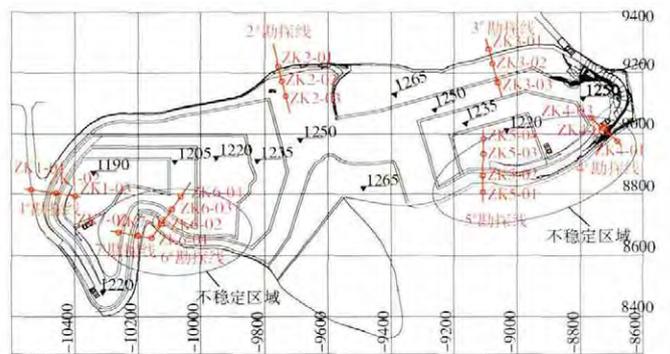


图 3 勘探线平面布置图

Fig.3 Layout of prospecting lines

4 PEM-JFEM 分析模型

4.1 点估计法研究方案

边坡岩体强度参数对于该边坡稳定性影响最重要, 因此将边坡强度参数(黏聚力 c 和内摩擦角 ϕ) 的不确定性纳入研究范畴, 建立边坡的点估计概率分析模型. 依据工程钻探资料, 该边坡由泥质石英岩构成, 但由于风化程度明显不同, 由上到下可分为三层, 分别为强风化层、中风化层和未风化层. 不同风化程度的岩层表现出的强度参数差异性很大, 其强度参数 c 和 ϕ 的平均值和方差见表 1.

依据点估计法原理可知, 本例中有六个随机变量, 每个随机变分别在 $\pm 1\sigma$ 处取值, 将产生 2^6 即 64 种计算组合, 每种组合下, 将按照强度折减法求解边坡相应的安全系数, 由式(5)和式(7)计算得到边坡安全系数

平均值(一阶矩)和标准差(二阶矩开平方),由式(9)~(11)得到边坡安全系数的变异系数、可靠性指标以及破坏概率。

表 1 点估计参数指标值
Table 1 Values of PEM parameters

岩层	c 均值/kPa	c 方差/kPa	φ 均值/(°)	φ 方差/(°)
强风化层	60	2	20	2
中风化层	210	1	32	2
未风化层	400	2	42	3

4.2 边坡节理模型构建

在南帮边坡开挖岩体露头表面布置了七条测线,采用测线法进行节理各类地质几何特征数统计,共获得 636 条节理的现场测量数据。测量节理样本数据经地质分析软件 Dips 分析,得到节理极点等密图,见

表 2 节理工程参数

Table 2 Engineering parameters of joints

节理组	平均倾向/ (°)	平均倾角/ (°)	费舍尔常数, K	长度/m		贯通率/%		密度/ (条·m ⁻¹)
				平均值	标准差	平均值	标准差	
A	346.1	40.1	60.6	8	0.7	0.6	0.15	5
B	276.4	66.3	29.0	6	0.6	0.4	0.1	2

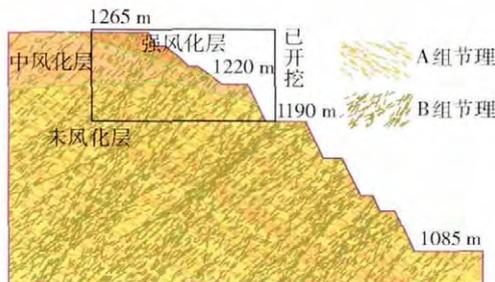


图 5 6# 边坡节理有限元模型

Fig. 5 Jointed finite element model of the 6# slope

图 4. 采用系统聚类法将节理样本划分为 A 和 B 两组,对 A 和 B 两组节理分别统计分析,得到两组节理的工程参数,见表 2。由 A 和 B 两组节理的工程参数,生成含 Veneziano 节理网络的 6# 边坡有限元模型,见图 5。

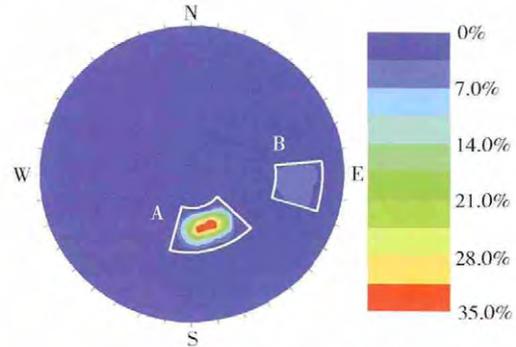


图 4 现场节理等密度图

Fig. 4 Polar iso-density map of field joints

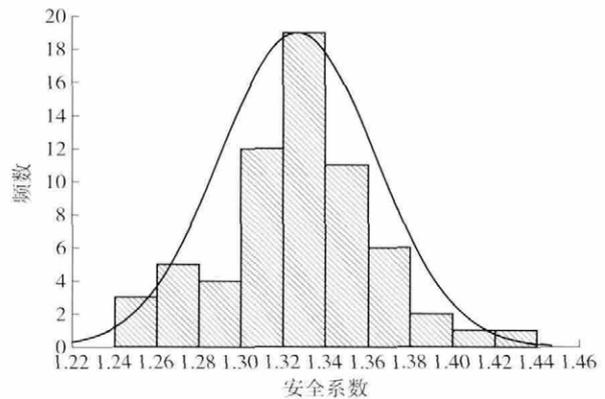


图 6 6# 边坡安全系数概率分布图

Fig. 6 Probability distribution of safety factors for the 6# slope

表 3 6# 边坡统计指标

Table 3 Statistical moments of the 6# slope

评价点	安全系数
平均值	1.33
标准差	0.0393
变异系数	0.0295
可靠性指标	8.3969
破坏概率(FS ≤ 1.0)	0.0002%
破坏概率(FS ≤ 1.15)	0.04%

5 分析与讨论

(1) 6# 边坡整体失稳概率评价。在节理有限元中,采用强度折减法计算节理边坡的安全系数值。计算得到安全系数最小值为 1.25,最大值为 1.43。图 6 为 6# 边坡安全系数的概率分布图,其分布规律符合正态分布。根据点估计理论,可求解得到整体边坡安全系数的平均值、标准差、变异系数、可靠性指标、破坏概率等统计参数,见表 3。标准差为 0.0393,变异系数 0.0295,边坡安全系数的离散程度较低。可靠性指标达到 8.4,计算结果可靠性相对较高。

当边坡安全系数的临界值选为 1.0 时,边坡失稳概率为 0.0002%,当边坡安全系数的临界值选为 1.15 时,边坡失稳概率为 0.04%。由此可见,该边坡发生整体失稳的概率不大。

图 7 为当 FS = 1.33 时边坡的屈服节理分布及最大剪应力云图。图中红色线条显示的是屈服节理单

元,边坡上部以及靠近开挖临空面的节理单元基本达到了屈服状态. 最大剪应变发生在 1085 m 平台坡脚处,其值为 0.687. 综合考虑边坡的破坏概率,可知该边坡整体较为稳定.

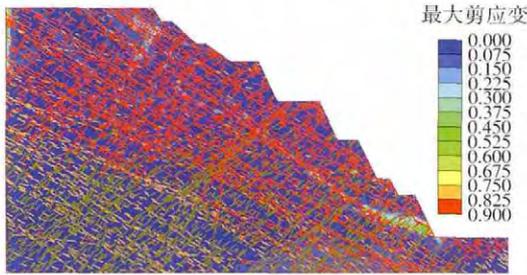


图 7 6#边坡屈服节理分布及最大剪应力云图 (FS = 1.33)

Fig.7 Yield joints distribution and maximum shear stress nephogram of the 6# slope (FS = 1.33)

(2) 上部已开挖台阶失稳概率验证分析. 为了验证该方法计算结果的可靠性,选取 6#边坡 1190 m 平台以上已经开挖的台阶(图 4 中方框部分),进行强度折减法计算,计算结果与现场作对比分析. 计算过程中,自定义搜索范围为 1190 m 平台以上边坡,得到上部台阶安全系数概率分布,见图 8. 安全系数最小值为 1.16,最大值为 1.72,平均值为 1.43. 按照点估计理论,得到其统计指标,见表 4. 上部台阶安全系数的标准差和变异系数均比整体边坡的大,安全系数分布离散性较大. 可靠性指标为 3.71,小于整体边坡. 虽然上部边坡安全系数的平均值较高,但离散性较大,可靠性较低,破坏概率也大于整体边坡的破坏概率. 由此可分析得出上部台阶破坏概率比整体边坡大,稳定性相对较差.

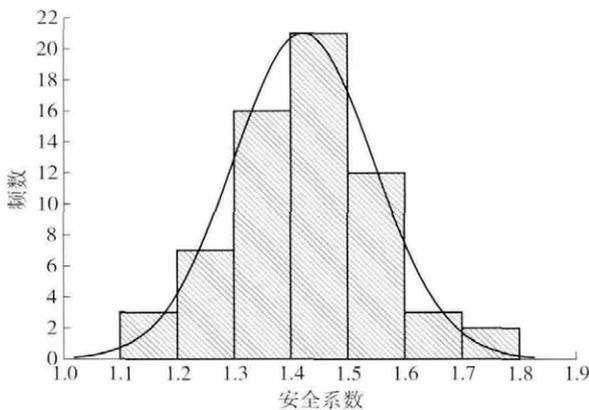


图 8 6#边坡安全系数概率分布图(上部台阶)

Fig.8 Probability distribution of safety factors for the 6# slope (upper stages)

如图 9 所示,当边坡的折减系数 FS = 1.43 时,对应的最大剪应变为 0.237,位于 1235 m 平台坡脚附近. 上部边坡基本可分为两大区域,坡体内沿岩层存在一个似圆弧滑动区域,单元主要表现为剪切-拉伸屈服

表 4 6#边坡统计指标(上部台阶)

Table 4 Statistical moments of the 6# slope (upper stages)

评价点	安全系数
平均值	1.43
标准差	0.1158
变异系数	0.0810
可靠性指标	3.7133
破坏概率(FS ≤ 1.0)	0.2%
破坏概率(FS ≤ 1.15)	2.17%

状态,近坡面单元表现为拉伸屈服状态. 图 10 为对应的总位移图. 在 1250 m 平台坡顶处最大位移为 1.3 m,显然该处边坡不稳定,发生了破坏. 结合图 9 中单元的屈服状态分布,可知该处边坡破坏为拉伸破坏.

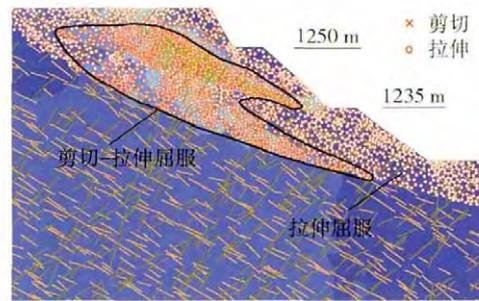


图 9 6#边坡上部台阶单元屈服分布及最大剪应变云图 (FS = 1.43)

Fig.9 Yielded element distribution and maximum shear strain nephogram of upper stages of the 6# slope (FS = 1.43)

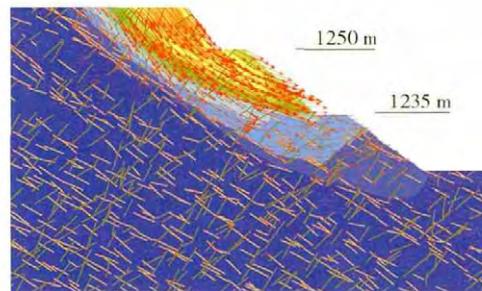


图 10 6#边坡上部台阶总位移云图 (FS = 1.43)

Fig.10 Total displacement nephogram of upper stages of the 6# slope (FS = 1.43)

图 11 为 6#勘探线附近上部台阶失稳现场照片. 在 1250 m 平台发生了沿边坡走向长约 20 m 的边坡滑塌破坏. 破坏形式表现为边坡岩体沿结构面向下滑移,进而形成拉伸型破坏,与前面数值分析结果一致.

采用相同方法,建立 5#勘探线所在边坡的 PEM-JFEM 分析模型,对已开挖边坡进行失稳概率分析,得到 5#勘探线所在边坡上部台阶的安全系数概率分布见图 12,概率统计指标见表 5. 安全系数最小值为 0.99,最大值为 1.55,平均值为 1.28. 由概率统计指标



图 11 6#边坡 1250 m 平台滑移破坏

Fig. 11 Sliding failure of 1250 m platform of the 6# slope

可知, 计算得到的安全系数离散性较大, 可靠性较低, 边坡失稳概率较大。

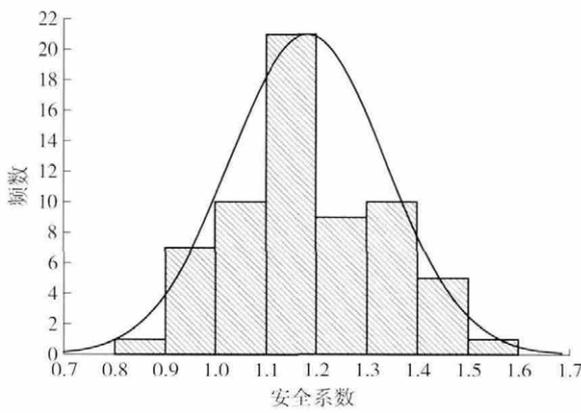


图 12 5#边坡安全系数概率分布图(上部台阶)

Fig. 12 Probability distribution of safety factors for the 6# slope(upper stages)

表 5 5#边坡统计指标(上部台阶)

Table 5 Statistical moments of the 5# slope (upper stages)

评价点	安全系数
平均值	1.28
标准差	0.1106
变异系数	0.0861
可靠性指标	2.5657
破坏概率($FS \leq 1.0$)	0.5%
破坏概率($FS \leq 1.15$)	11.33%

当边坡折减系数 $FS = 1.28$ 时, 相应屈服单元分布与最大剪应变云图和总位移云图分别见图 13 和图 14。最大剪应变为 0.6, 边坡近地表及剖面发生了不同程度的拉伸屈服, 对应的节理单元也基本处于屈服状态。最大位移发生在坡顶, 为 1.6 m, 从边坡地表至 1250 m 平台发生了较大的位移, 可以判定上部台阶已经失稳, 与图 15 现场照片情况一致。

6 结论

(1) 点估计方法能较好地处理岩土工程问题中岩

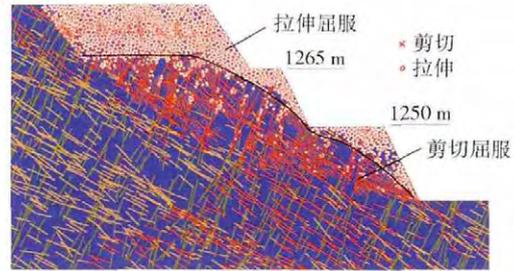


图 13 5#边坡上部台阶单元屈服分布及最大剪应变云图($FS = 1.28$)

Fig. 13 Yielded element distribution and maximum shear strain nephogram of upper stages of the 5# slope ($FS = 1.28$)

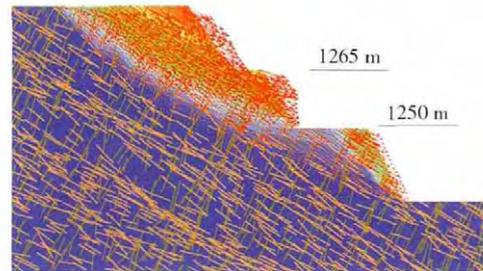


图 14 5#边坡上部台阶总位移云图($FS = 1.28$)

Fig. 14 Total displacement nephogram of upper stages of the 5# slope ($FS = 1.28$)

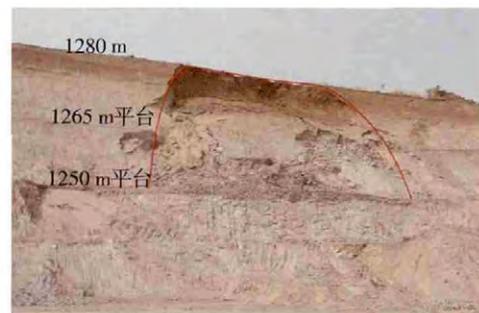


图 15 5#边坡上部台阶失稳破坏

Fig. 15 Failure of upper platforms of the 5# slope

体参数的不确定性和变异性, 在边坡稳定性评价方面是一种重要的不确定性分析方法。

(2) 边坡稳定性评价中, 采用节理有限元方法构建的岩质节理边坡, 充分考虑了岩体中的节理属性, 体现了岩层接触作用的非线性关系, 得到边坡的应力场、位移场以及基于强度折减法得到的安全系数。该方法能较好地模拟节理发育的岩质边坡。

(3) 基于 PEM-JFEM 方法, 以赞比亚某露天矿 6# 勘探线边坡为例进行了边坡整体稳定性评价。结果表明, 整体边坡破坏概率为 0.0002% ($FS = 1.0$), 安全系数平均值为 1.33, 整体边坡较稳定。以 6# 勘探线和 5# 勘探线上部已开挖边坡分别采用 PEM-JFEM 方法进行验证分析, 分析结果与现场实际情况一致。

参 考 文 献

- [1] Zhu Y X. *Reliability Analysis of Slope*. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1993
(祝玉学. 边坡模糊随机可靠性分析. 北京: 冶金工业出版社, 1993)
- [2] Rosenblueth E. Point estimates for probability moments. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1975, 72(10): 3812
- [3] Zhang Y P, Li T, Wang W. Probability analysis of consolidation of ground with vertical drain using point-estimate method. *Chin J Geotech Eng*, 2007, 29(9): 1367
(张仪萍, 李涛, 王伟. 竖井地基固结概率分析的点估计法. 岩土工程学报, 2007, 29(9): 1367)
- [4] Luo W Q, Gong J. Application of Rosenblueth moment estimation method into probabilistic analysis of slope stability. *Chin J Rock Mech Eng*, 2003, 22(2): 232
(罗文强, 龚珏. Rosenblueth 方法在斜坡稳定性概率评价中的应用. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 232)
- [5] Yang K, Zhou C B, Zhang X, et al. Fuzzy-random reliability analysis of blocky rock mass in slopes. *Chin J Rock Mech Eng*, 2006, 25(2): 407
(杨坤, 周创兵, 张昕, 等. 边坡块状结构岩体模糊随机可靠性分析. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(2): 407)
- [6] Fu W X, Hu J, Liao Y, et al. Reliability analysis of rock mass stability based on Hoek-Brown empirical formulas. *Rock Soil Mech*, 2009, 30(Suppl 2): 214
(符文薰, 胡静, 廖异, 等. 基于 Hoek-Brown 经验公式的岩体稳定性可靠度分析. 岩土力学, 2009, 30(增刊 2): 214)
- [7] Langford J C, Diederichs M S. Reliability based approach to tunnel lining design using a modified point estimate method. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2013, 60: 263
- [8] Abdellah W, Mitri H S, Thibodeau D, et al. Stability of mine development intersections: a probabilistic analysis approach. *Can Geotech J*, 2014, 51(2): 184
- [9] Hammah R E, Yacoub T E, Curran J H. Numerical modelling of slope uncertainty due to rock mass jointing // *Proceeding of the International Conference on Rock Joints and Jointed Rock Masses*. Tucson, 2009: 7
- [10] Hammah R E, Yacoub T E, Curran J H. Probabilistic slope analysis with the finite element method // *Proceedings of the 41st US Symposium on Rock Mechanics and the 4th US-Canada Rock Mechanics Symposium*. Asheville, 2008
- [11] Hammah R E, Yacoub T, Corkum B, et al. The practical modelling of discontinuous rock masses with finite element analysis // *Proceedings of the 42nd US Rock Mechanics Symposium: 2nd US-Canada Rock Mechanics Symposium*. San Francisco, 2008
- [12] Altarejos-Garcia L, Martinez-Chenoll M L, Escuder-Bueno I, et al. Assessing the impact of uncertainty on flood risk estimates with reliability analysis using 1-D and 2-D hydraulic models. *Hydrol Earth Syst Sci*, 2012, 16(7): 1895
- [13] Song Y H, Huang M Q, Sun M. Application of finite elements with joint net to stability analysis of toppling slope. *Rock Soil Mech*, 2011, 32(4): 1205
(宋彦辉, 黄民奇, 孙苗. 节理网络有限元在倾倒地坡稳定分析中的应用. 岩土力学, 2011, 32(4): 1205)
- [14] Wu J C, Zhang Y M, Li H X. Stability analysis of underground caverns by jointed finite element method. *Appl Mech Mater*, 2012, 238: 814
- [15] Wang Y, Li X, Wang M Y, et al. Failure mechanism of toppling rock slope using jointed finite element simulation method. *Chin J Rock Mech Eng*, 2013, 32(Suppl 2): 3945
(王宇, 李晓, 王梦瑶, 等. 反倾岩质边坡变形破坏的节理有限元模拟计算. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(增刊 2): 3945)
- [16] Li S D, Yu H L. Modification of Goodman interface element. *Chin J Rock Mech Eng*, 2004, 23(15): 2628
(李守德, 俞洪良. Goodman 接触面单元的修正与探讨. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(15): 2628)
- [17] Phase 2 Joint Network Overview [J/OL]. Rocscience Inc. (2011-07-14) [2014-05-10]. https://www.rocscience.com/help/phase2/webhelp/phase2_model/Joint_Network_Overview.htm
- [18] Wu S C, Liu F B, Zhou Y, et al. Hierarchical cluster of rock mass joint attitude and analysis of slope instability modes. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2014, 36(1): 1
(吴顺川, 刘芳标, 周喻, 等. 岩体节理产状系统聚类与边坡失稳模式分析. 北京科技大学学报, 2014, 36(1): 1)
- [19] Wu S C, Zhou Y, Gao Y T, et al. Research on construction method of stochastic joints 3D-network model of equivalent rock mass. *Chin J Rock Mech Eng*, 2012, 31(Suppl 1): 3082
(吴顺川, 周喻, 高永涛, 等. 等效岩体随机节理三维网络模型构建方法研究. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(增刊 1): 3082)